Espacios Vectoriales

Ejercicios 6.1 Espacios Vectoriales realesDaniel Felipe González Obando

Texto ÁLGEBRA LINEAL. Bernard Kolman, David R. Hill

3. Determine si el conjunto dado V es cerrado bajo las operaciones $\oplus$ y $\odot$.

V es el conjunto de todos los polinomios de la forma $at^2 + bt + c$ donde a, b y c son números reales, y $b = a + 1$;
Equation:

$$\left(a_1t^2 + b_1t + c_1\right) \oplus \left(a_2t^2 + b_2t + c_2\right) = (a_1 + a_2)t^2 + (b_1 + b_2)t + (c_1 + c_2)$$

y
Equation:

$$r \odot \left(at^2 + bt + c\right) = (ra)t^2 + (rb)t + rc.$$

13. determine si el conjunto dado, junto con las operaciones dadas es un espacio vectorial. Si no lo es, enumere las propiedades de la definición 1 que no se cumplen.

El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales de la forma $(0, 0, z)$ con las operaciones
Equation:

$$(0, 0, z) \oplus \left(0, 0, z'\right) = \left(0, 0, z + z'\right)$$

y
Equation:

$$c \odot (0, 0, z) = (0, 0, \mathrm{cz})$$

Solución.

3.

Proof El problema nos dice $at^2 + bt + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; y $b = a + 1$

entonces si
Equation:

$$\overrightarrow{u} = a_1t^2 + b_1t + c_1$$

Equation:

$$\overrightarrow{v} = a_2t^2 + b_2t + c_2$$

tendremos
Equation:

$$\overrightarrow{u} \oplus \overrightarrow{v} = (a_1 + a_2)t^2 + (b_1 + b_2)t + (c_1 + c_2)$$

cambiando b por $a + 1$,
Equation:

$$\overrightarrow{u} \oplus \overrightarrow{v} = (a_1 + a_2)t^2 + (a_1 + 1 + a_2 + 1)t + (c_1 + c_2)$$

reduciendo la expresión $(a_1 + 1 + a_2 + 1)$,
Equation:

$$\overrightarrow{u} \oplus \overrightarrow{v} = (a_1 + a_2)t^2 + (a_1 + a_2 + 2)t + (c_1 + c_2)$$

tomando $a_1 + a_2$ como a,
Equation:

$$\overrightarrow{u} \oplus \overrightarrow{v} = (a_1 + a_2)t^2 + (a + 2)t + (c_1 + c_2)$$

y por tanto $b \neq a + 2$, con lo cual concluimos que V no esta cerrado bajo las operaciones $\oplus$ y $\odot$. $\square$

13.

Proof El problema nos dice que $(0, 0, z) \in \mathbb{R}$ y que se cumple $(0, 0, z) \oplus (0, 0, z') = (0, 0, z + z')$ y $c \odot (0, 0, z) = (0, 0, \text{cz})$, por lo tanto viendo la aplicación de las propiedades comprobaremos si es o no un espacio vectorial.

Si $\overrightarrow{u} = (0, 0, z), \overrightarrow{v} = (0, 0, z'), \overrightarrow{w} = (0, 0, z'') \in V$

- $\overrightarrow{u} \oplus \overrightarrow{v} \in V$, esto es $\overrightarrow{u} \oplus \overrightarrow{v} = (0, 0, z + z') \in V$, por lo tanto se cumple la propiedad clausurativa de la suma vectorial.
- $\overrightarrow{u} \oplus \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \oplus \overrightarrow{u}$, esto es $(0, 0, z + z') = (0, 0, z' + z)$, por lo tanto se cumple la propiedad conmutativa de la suma vectorial.
- $\left(\overrightarrow{w} \oplus \overrightarrow{v}\right) \oplus \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} \oplus \left(\overrightarrow{v} \oplus \overrightarrow{u}\right)$, esto es $(0, 0, z'' + z') \oplus (0, 0, z) = (0, 0, z'') \oplus (0, 0, z' + z)$, que es lo mismo que $(0, 0, z'' + z' + z) = (0, 0, z'' + z' + z)$, por lo tanto se cumple la propiedad asociativa de la suma vectorial.
- $\exists! \overrightarrow{0} \in V : \overrightarrow{0} \oplus \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \oplus \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$, esto es $(0, 0, 0) \oplus (0, 0, z) = (0, 0, z) \oplus (0, 0, 0) = (0, 0, z)$, por lo tanto se cumple la propiedad modulativa de la suma vectorial.
- $\exists! {-u} \in V : -u \oplus \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \oplus -u = \overrightarrow{0}$ esto es $(0, 0, -z) \oplus (0, 0, z) = (0, 0, z) \oplus (0, 0, -z) = (0, 0, 0)$, por lo tanto se cumple la propiedad de la existencia del inverso de la suma vectorial.

Además,

- $a \odot \overrightarrow{u} \in V$, esto es $a \odot (0, 0, z) = (0, 0, az) \in V$, por lo tanto se cumple la propiedad clausurativa del producto escalar.
- $(a \cdot b) \odot \overrightarrow{u} = a \odot \left(b \odot \overrightarrow{u}\right)$, esto es $(a \cdot b) \odot (0, 0, z) = a \odot (b \odot (0, 0, z)) = (0, 0, abz)$, por lo cual se cumple la propiedad asociativa del producto escalar.
- $(a + b) \odot \overrightarrow{u} = \left(a \odot \overrightarrow{u}\right) \oplus \left(b \odot \overrightarrow{u}\right)$, esto es $(a + b) \odot (0, 0, z) = (a \odot (0, 0, z)) \oplus (b \odot (0, 0, z)) = (0, 0, (a + b) \cdot z)$, por lo tanto se cumple la primera propiedad de distribución del producto escalar.
- $a \odot \left(\overrightarrow{u} \oplus \overrightarrow{v}\right) = \left(a \odot \overrightarrow{u}\right) \oplus \left(a \odot \overrightarrow{v}\right)$, esto es $a \odot ((0, 0, z) \oplus (0, 0, z')) = (a \odot (0, 0, z)) \oplus (a \odot (0, 0, z')) = (0, 0, a\left(z + z'\right))$, por lo tanto se cumple la segunda propiedad distributiva del producto escalar.

Una vez desmostradas las propiedades de los espacios vectoriales, podemos decir que V es un espacio vectorial. $\square$